§ 7. ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ЕГО ГРАФИК

В главе 1 мы видели, что математической моделью реальной ситуации может служить линейное уравнение с одной переменной или уравнение, которое после преобразований сводится к линейному. А теперь рассмотрим такую реальную ситуацию.

Из городов A и B, расстояние между которыми 500 км, навстречу друг другу вышли два поезда, каждый со своей постоянной скоростью. Известно, что первый поезд вышел на 2 ч раньше второго. Через 3 ч после выхода второго поезда они встретились. Чему равны скорости поездов?

Составим математическую модель задачи. Пусть x км/ч — скорость первого поезда, y км/ч — скорость второго поезда. Первый был в пути 5 ч и, значит, прошёл путь $5x$ км. Второй поезд был в пути 3 ч, т. е. прошёл путь $3y$ км. Их встреча произошла в пункте C. На рисунке 27 представлена геометрическая модель ситуации. На алгебраическом языке её можно описать так:

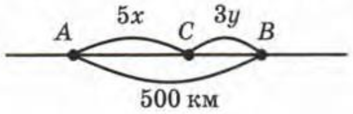

Рис. 27

$$5x + 3y = 500$$

или

$$5x + 3y - 500 = 0.$$

Такую математическую модель называют линейным уравнением с двумя переменными x, y.

Вообще

$$ax + by + c = 0,$$

где a, b, c — числа (коэффициенты), — это **линейное уравнение с двумя переменными x и y.**

линейное уравнение с двумя переменными

Вернёмся к уравнению $5x + 3y = 500$. Замечаем, что если $x = 40$, $y = 100$, то $5 \cdot 40 + 3 \cdot 100 = 500$ — верное равенство. Значит, ответ на вопрос задачи может быть таким: скорость первого поезда 40 км/ч, скорость второго поезда 100 км/ч. Пару чисел $x = 40$, $y = 100$ называют *решением уравнения* $5x + 3y = 500$. Говорят также, что пара значений (40; 100) *удовлетворяет уравнению* $5x + 3y = 500$.

Найденное решение не единственное. В самом деле, возможен и такой вариант: $x = 64$, $y = 60$; действительно, $5 \cdot 64 + 3 \cdot 60 = 500$ — верное равенство. И такой: $x = 70$, $y = 50$ (поскольку $5 \cdot 70 + 3 \cdot 50 = 500$ — верное равенство).

А вот, скажем, пара чисел $x = 80$, $y = 60$ решением уравнения не является, поскольку при этих значениях верного равенства не получается: $5 \cdot 80 + 3 \cdot 60 \neq 500$.

решение уравнения $ax + by + c = 0$

Вообще **решением уравнения $ax + by + c = 0$** называют всякую пару чисел $(x; y)$, которая удовлетворяет этому уравнению, т. е. обращает равенство с переменными $ax + by + c = 0$ в верное числовое равенство.

Замечание. Вернёмся ещё раз к уравнению $5x + 3y = 500$, полученному в рассмотренной выше задаче. Среди бесконечного множества его решений имеются, например, и такие: $x = 100$, $y = 0$ (в самом деле, $5 \cdot 100 + 3 \cdot 0 = 500$ — верное числовое равенство); $x = 118$, $y = -30$ (так как $5 \cdot 118 + 3 \cdot (-30) = 500$ — верное числовое равенство). Однако, являясь решениями уравнения, эти пары не могут служить решениями данной задачи, ведь скорость поезда не может быть равной нулю (тогда он не едет, а стоит на месте); тем более скорость поезда не может быть отрицательной.

Пример 1. Изобразить решения линейного уравнения с двумя переменными $x + y - 3 = 0$ точками в координатной плоскости xOy.

Решение. Подберём несколько решений заданного уравнения, т. е. несколько пар чисел, которые удовлетворяют уравнению: (3; 0), (2; 1), (1; 2), (0; 3), (−2; 5).

Построим в координатной плоскости xOy точки $A(3; 0)$, $B(2; 1)$, $C(1; 2)$, $D(0; 3)$, $E(-2; 5)$ (рис. 28). Обратите внимание: все эти пять точек лежат на одной прямой l, проведём её.

Говорят, что прямая l является *графиком уравнения* $x + y - 3 = 0$, или что прямая l — *геометрическая модель* уравнения $x + y - 3 = 0$ (или $x + y = 3$).

Итак, если пара чисел $(x; y)$ удовлетворяет уравнению $x + y - 3 = 0$, то точка $M(x; y)$ принадлежит прямой l; если точка $M(x; y)$ принадлежит прямой l, то пара $(x; y)$ — решение уравнения

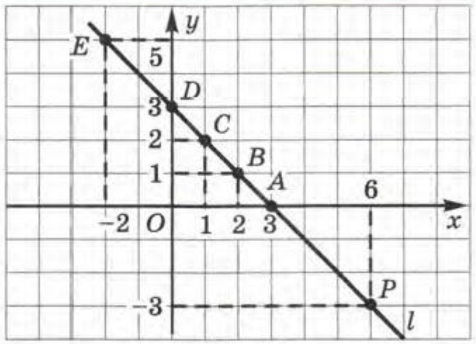

Рис. 28

$x + y - 3 = 0$. Например, точка $P(6; -3)$ принадлежит прямой l (см. рис. 28) и пара $(6; -3)$ — решение уравнения $x + y - 3 = 0$.

Подведём итоги:

Словесная модель	Алгебраическая модель	Геометрическая модель
Сумма двух чисел равна 3	$x + y = 3$ (линейное уравнение с двумя переменными)	Прямая l на рисунке 28 (график линейного уравнения с двумя переменными)

А как вообще выглядит график линейного уравнения $ax + by + c = 0$? Рассмотрим конкретные случаи.

1) Пусть $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$. Тогда уравнение принимает вид $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 = 0$, т. е. $0 = 0$ при любых значениях x, y. Это значит, что любая пара чисел $(x; y)$ является решением уравнения, а график уравнения — вся координатная плоскость.

2) Пусть $a = 0$, $b = 0$, $c \neq 0$. Тогда уравнение принимает вид $0 \cdot x + 0 \cdot y + c = 0$, т. е. $c = 0$. Это не выполняется ни при каких значениях x, y, т. е. уравнение не имеет решений.

3) Пусть $a = 0$, $b \neq 0$. Тогда уравнение принимает вид $0 \cdot x + by + c = 0$, т. е. $y = -\frac{c}{b}$. Графиком служит прямая, параллельная оси x, об этом мы говорили в § 6.

4) Пусть $a \neq 0$, $b = 0$. Тогда уравнение принимает вид $ax + 0 \cdot y + c = 0$, т. е. $x = -\frac{c}{a}$. Графиком служит прямая, параллельная оси y, об этом мы также говорили в § 6.

5) Пусть $a \neq 0$, $b \neq 0$. В этом случае графиком является прямая, не параллельная ни одной из осей координат (как это было в примере 1).

Вообще справедлива следующая теорема.

Теорема 1. ***Если хотя бы один из коэффициентов a, b линейного уравнения $ax + by + c = 0$ отличен от нуля, то графиком уравнения служит прямая линия.***

Пример 2. Построить график уравнения $3x - 2y + 6 = 0$.

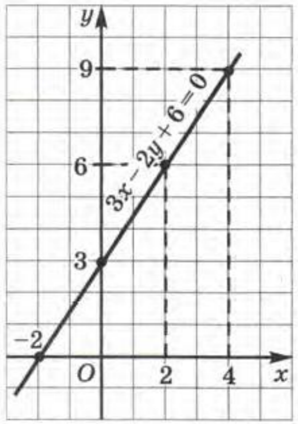

Рис. 29

Решение. Подберём несколько решений заданного уравнения:

1) $(0; 3)$; в самом деле, если $x = 0$, $y = 3$, то $3 \cdot 0 - 2 \cdot 3 + 6 = 0$ — верное равенство (в уравнение $3x - 2y + 6 = 0$ мы подставили значения $x = 0$, $y = 3$);

2) $(-2; 0)$; действительно, если $x = -2$, $y = 0$, то $3 \cdot (-2) - 2 \cdot 0 + 6 = 0$ — верное равенство;

3) $(2; 6)$; если $x = 2$, $y = 6$, то $3 \cdot 2 - 2 \cdot 6 + 6 = 0$ — верное равенство;

4) $(4; 9)$; если $x = 4$, $y = 9$, то $3 \cdot 4 - 2 \cdot 9 + 6 = 0$ — верное равенство.

Построим точки $(0; 3)$, $(-2; 0)$, $(2; 6)$, $(4; 9)$ на координатной плоскости xOy. Они лежат на одной прямой, проведём её (рис. 29). Эта прямая и есть график уравнения $3x - 2y + 6 = 0$.

Пример 2 решён верно, но, признаемся, очень нерационально. Почему? Давайте рассуждать.

обратите внимание

1. Мы знаем, что графиком линейного уравнения $3x - 2y + 6 = 0$ является прямая (это утверждается в теореме 1). Чтобы провести прямую, достаточно указать две её точки. Через две точки можно провести прямую и притом только одну — этому нас

учит геометрия. Поэтому построенные выше четыре точки — это явный перебор. Достаточно было построить точки (0; 3) и (−2; 0) и с помощью линейки провести через них прямую.

2. Решения данного уравнения мы подбирали, т. е. угадывали. Угадать что-либо всегда труднее, чем действовать по определённому правилу. Нельзя ли было и здесь не угадывать, а действовать по какому-то правилу? Можно. Например, так. Дадим переменной x конкретное значение, например $x = 0$ (обычно пишут $x_1 = 0$). Подставив это значение в уравнение $3x - 2y + 6 = 0$, получим $3 \cdot 0 - 2y + 6 = 0$, т. е. $-2y + 6 = 0$. Из этого уравнения находим $y = 3$ (обычно пишут $y_1 = 3$). Значит, если $x = 0$, то $y = 3$; пара (0; 3) — решение данного уравнения.

Дадим переменной x ещё одно конкретное значение, например $x = -2$ (обычно пишут $x_2 = -2$). Подставив это значение в уравнение $3x - 2y + 6 = 0$, получим $3 \cdot (-2) - 2y + 6 = 0$, т. е. $-2y = 0$. Из этого уравнения находим $y = 0$ (обычно пишут $y_2 = 0$). Значит, если $x = -2$, то $y = 0$; пара (−2; 0) — решение данного уравнения.

Вот теперь мы в состоянии сформулировать алгоритм построения графика линейного уравнения $ax + by + c = 0$ (где, напомним, a, b, c — любые числа, но $a \neq 0$, $b \neq 0$).

Алгоритм построения графика уравнения
$ax + by + c = 0$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$

1. Придать переменной x конкретное значение $x = x_1$; найти из уравнения $ax_1 + by + c = 0$ соответствующее значение $y = y_1$.
2. Придать переменной x другое значение $x = x_2$; найти из уравнения $ax_2 + by + c = 0$ соответствующее значение $y = y_2$.
3. Построить на координатной плоскости xOy точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$.
4. Провести через эти две точки прямую — она и будет графиком уравнения $ax + by + c = 0$.

Замечание. Чаще всего на первом шаге алгоритма берут значение $x = 0$. Второй шаг иногда немного изменяют: полагают $y = 0$ и находят соответствующее значение x.

Пример 3. Построить график уравнения

$$4x + 3y - 12 = 0.$$

Решение. Будем действовать по алгоритму (с учётом замечания).

1) Положим $x = 0$, подставим это значение в уравнение $4x + 3y - 12 = 0$, получим $4 \cdot 0 + 3y - 12 = 0$, $3y - 12 = 0$, $y = 4$.

2) Положим $y = 0$, подставим это значение в уравнение $4x + 3y - 12 = 0$, получим $4 \cdot x + 3 \cdot 0 - 12 = 0$, $4x - 12 = 0$, $x = 3$.

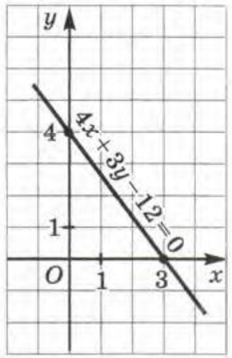

Рис. 30

3) Построим на координатной плоскости xOy две точки: (0; 4) — она найдена на первом шаге алгоритма и (3; 0) — она найдена на втором шаге.

4) Проведём через точки (0; 4) и (3; 0) прямую. Это и есть искомый график (рис. 30).

Пример 4. Иванов и Петров посадили на своих садовых участках яблони, причём Петров посадил яблонь в 2,5 раза больше, чем Иванов. На следующий год они увеличили число яблонь (подсадили новые саженцы), причём у Иванова стало яблонь в 3 раза больше, чем было, а у Петрова в 2 раза больше, чем было. В итоге у них вместе стало 16 яблонь. Сколько яблонь посадили Иванов и Петров в первый год?

Решение.

Первый этап. *Составление математической модели.*

Пусть x — число яблонь, посаженных в первый год Ивановым, а y — число яблонь, посаженных в первый год Петровым. По условию задачи $y = 2{,}5x$. Здесь целесообразно умножить обе части уравнения на 2, получим $2y = 5x$. Это уравнение перепишем в виде

$$5x - 2y = 0. \qquad (1)$$

На второй год Иванов увеличил число саженцев на своём участке в 3 раза и, значит, у него стало $3x$ яблонь. Петров увеличил число саженцев на своём участке в 2 раза, т. е. у него стало $2y$ яблонь. По условию у обоих в сумме стало 16 яблонь, т. е. $3x + 2y = 16$. Перепишем это уравнение в виде

$$3x + 2y - 16 = 0. \qquad (2)$$

Математическая модель задачи готова, она состоит из двух линейных уравнений с двумя переменными x и y — из уравнений (1) и (2). Обычно в таких случаях уравнения записывают одно под другим и используют специальный символ — фигурную скобку — и специальный термин — *система уравнений*:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 0, \\ 3x + 2y - 16 = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Интересующая нас пара чисел $(x; y)$ должна удовлетворять и уравнению (1), и уравнению (2), т. е. интересующая нас точка $(x; y)$ должна лежать как на прямой (1), так и на прямой (2). Что делать? Ответ очевиден: надо построить прямую (1), затем прямую (2) и, наконец, найти точку пересечения этих прямых.

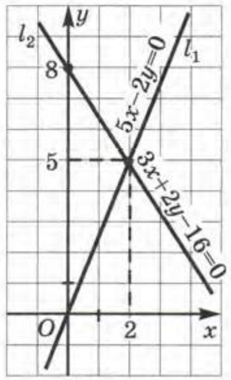

Рис. 31

1) Строим график уравнения $5x - 2y = 0$. Если $x = 0$, то $y = 0$; если $x = 2$, то $y = 5$. Проведём через точки (0; 0) и (2; 5) прямую l_1 (рис. 31).

2) Строим график уравнения $3x + 2y - 16 = 0$. Если $x = 0$, то $y = 8$; если $x = 2$, то $y = 5$. Проведём через точки (0; 8) и (2; 5) прямую l_2 (рис. 31).

3) Прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке (2; 5), т. е. $x = 2$, $y = 5$.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Спрашивается, сколько яблонь посадили в первый год Иванов и Петров, т. е. чему равны x и y. Ответ на этот вопрос уже получен: $x = 2$, $y = 5$.

О т в е т: в первый год Иванов посадил 2 яблони, а Петров — 5 яблонь.

Как видите, не зря мы с вами учились строить графики линейных уравнений с двумя переменными. Это позволило нам от одной математической модели (алгебраической модели (3)) перейти к другой математической модели — геометрической (две прямые на координатной плоскости на рисунке 31), что и дало возможность довести решение до конца.

узнаете далее

А можно ли работать непосредственно с моделью (3), не переходя к геометрической модели? Можно, но об этом речь впереди, в главе 3. Там, используя новые знания, мы снова вернёмся к модели (3).

Вопросы для самопроверки

1. Запишите в общем виде линейное уравнение с двумя переменными x, y.
2. Запишите в общем виде линейное уравнение с двумя переменными u, v.
3. Что называют решением уравнения $ax + by + c = 0$, где x, y — переменные, а a, b, c — коэффициенты?
4. Может ли линейное уравнение с двумя переменными не иметь решений? Если да, то приведите пример.
5. Может ли линейное уравнение с двумя переменными иметь конечное множество решений; бесконечное множество решений? Если да, то приведите пример.
6. Придумайте текстовую задачу, математическая модель которой представляет собой линейное уравнение с двумя переменными.
7. Что является графиком линейного уравнения с двумя переменными, у которого хотя бы один коэффициент при переменной отличен от нуля? оба коэффициента при переменных равны нулю?
8. Как построить график линейного уравнения с двумя переменными, у которого оба коэффициента при переменных отличны от нуля? Сколько точек для этого достаточно взять?
9. Что представляет собой график линейного уравнения с двумя переменными, у которого один коэффициент при переменной отличен от нуля, а другой равен нулю? Рассмотрите два случая.
10. В каком случае из линейного уравнения $ax + by + c = 0$ можно выразить переменную y через переменную x, а в каком — нельзя? Что получится, если переменную y можно выразить через переменную x?