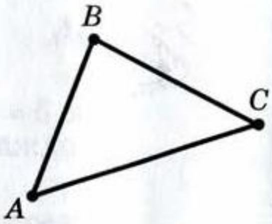
14 Треугольник

Отметим какие-нибудь три точки, не лежащие на одной прямой, и соединим их отрезками (рис. 49, *а*). Получим геометрическую фигуру, которая называется **треугольником.** Отмеченные три точки называются **вершинами**, а отрезки — **сторонами** треугольника. На рисунке 49, *б* изображён треугольник с вершинами A, B, C и сторонами AB, BC и CA. Такой треугольник будем обозначать так: $\triangle ABC$ (читается: «треугольник ABC»). Этот же треугольник можно обозначить иначе, записав буквы A, B, C в другом порядке: $\triangle BCA$, $\triangle CBA$ и т. д.

Треугольник

а)



Треугольник с вершинами A, B, C и сторонами AB, BC и CA

б)

Рис. 49

Три угла — $\angle BAC$, $\angle CBA$ и $\angle ACB$ — называются **углами треугольника** ABC. Часто их обозначают одной буквой: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Сумма длин трёх сторон треугольника называется его **периметром**.

Напомним, что две фигуры, в частности два треугольника, называются равными, если их можно совместить наложением. На рисунке 50 изображены равные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$.

Каждый из этих треугольников можно наложить на другой так, что они полностью совместятся, т. е. попарно совместятся их вершины и стороны. Ясно, что при этом совместятся попарно и углы этих треугольников.

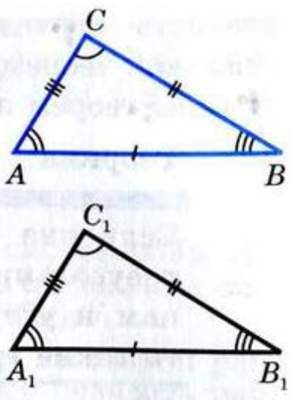


Рис. 50

Таким образом, **если два треугольника равны, то элементы (т. е. стороны и углы) одного треугольника соответственно равны элементам другого треугольника.**

Отметим, что **в равных треугольниках против соответственно равных сторон** (т. е. совмещающихся при наложении) **лежат равные углы, и обратно: против соответственно равных углов лежат равные стороны.** Так, например, в равных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$, изображённых на рисунке 50, против соответственно равных сторон AB и A_1B_1 лежат равные углы C и C_1.

Равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ обозначается так: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Оказывается, что равенство двух треугольников можно установить, не накладывая один треугольник на другой, а сравнивая только некоторые их элементы. Как это сделать, мы обсудим в следующих пунктах.

Теорема

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, углы A и A_1 равны (рис. 51). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Так как $\angle A = \angle A_1$, то треугольник ABC можно наложить на треугольник $A_1B_1C_1$ так, что вершина A совместится с вершиной A_1, а стороны AB и AC наложатся соответственно на лучи A_1B_1 и A_1C_1. Поскольку $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, то сторона AB совместится со стороной A_1B_1, а сторона AC — со стороной A_1C_1; в частности, совместятся точки B и B_1, C и C_1. Следовательно, совместятся стороны BC и B_1C_1. Итак, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся, значит, они равны. **Теорема доказана.**

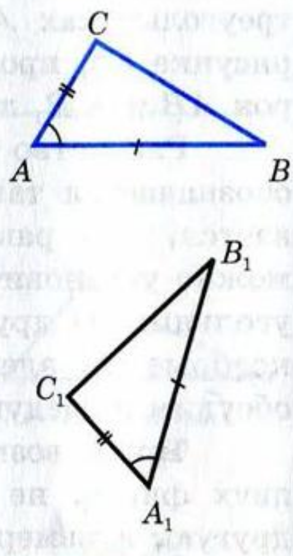


Рис. 51

Доказанная теорема выражает **признак** (равенство у треугольников двух сторон и угла между ними), по которому можно сделать вывод о равенстве треугольников. Он называется **первым признаком равенства треугольников.**

Задачи

90 Сторона AB треугольника ABC равна 17 см, сторона AC вдвое больше стороны AB, а сторона BC на 10 см меньше стороны AC. Найдите периметр треугольника ABC.

91 Периметр треугольника равен 48 см, а одна из сторон равна 18 см. Найдите две другие стороны, если их разность равна 4,6 см.

92 Периметр одного треугольника больше периметра другого. Могут ли быть равными эти треугольники?

94 На рисунке 52 $AB = AC$, $\angle 1 = \angle 2$. а) Докажите, что треугольники ABD и ACD равны; б) найдите BD и AB, если $AC = 15$ см, $DC = 5$ см.

95 На рисунке 53 $BC = AD$, $\angle 1 = \angle 2$. а) Докажите, что треугольники ABC и CDA равны; б) найдите AB и BC, если $AD = 17$ см, $DC = 14$ см.

96 На рисунке 54 $OA = OD$, $OB = OC$, $\angle 1 = 74°$, $\angle 2 = 36°$. а) Докажите, что треугольники AOB и DOC равны; б) найдите $\angle ACD$.

97 Отрезки AC и BD точкой пересечения делятся пополам. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle CDA$.

98 В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. На сторонах AB и A_1B_1 отмечены точки P и P_1 так, что $AP = A_1P_1$. Докажите, что $\triangle BPC = \triangle B_1P_1C_1$.

99 На сторонах угла CAD отмечены точки B и E так, что точка B лежит на отрезке AC, а точка E — на отрезке AD, причём $AC = AD$ и $AB = AE$. Докажите, что $\angle CBD = \angle DEC$.

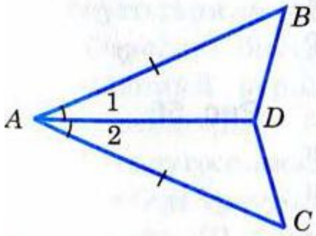


Рис. 52

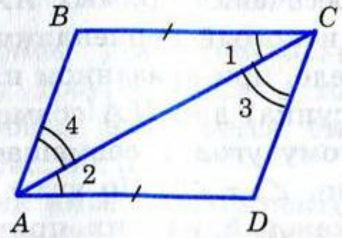


Рис. 53

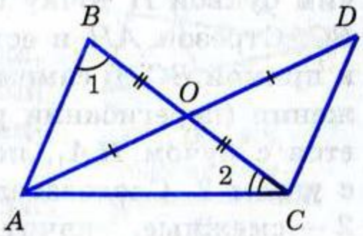
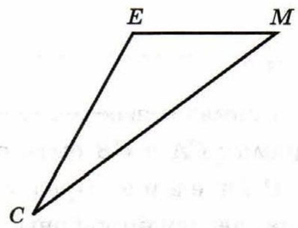


Рис. 54

50



а) Запишите все возможные обозначения данного треугольника.

б) Укажите: сторону, лежащую против угла C; угол, лежащий против стороны CM; углы, прилежащие к стороне EC; угол между сторонами EC и EM.

в) Измерьте меньшую сторону данного треугольника и его больший угол и запишите результат измерений.

Ответ.

а) $\triangle CEM$, ____________________

б) Против угла C лежит сторона ____; против стороны CM лежит ______; к стороне EC прилежат углы ______; между сторонами EC и EM — угол ______

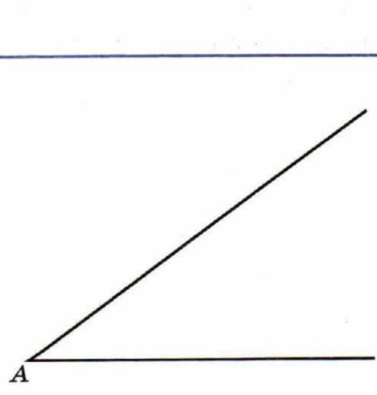
в) EM = ___ см; $\angle CEM$ = ______

51

а) С помощью масштабной линейки закончите построение треугольника ABC, если $AB = 5$ см, $AC = 4$ см.

б) Измерьте градусные меры углов B и C построенного треугольника ABC и запишите результат измерений.

в) Измерьте сторону BC и найдите периметр треугольника ABC.



Ответ.

б) $\angle B$ = ________________

в) BC = ____ см и P_{ABC} = _____ см.